

CURS 1986-87

Problemes de la XXIII Olimpíada Matemàtica.

Primera fase (Catalunya), 1986-87

Primera sessió. 22 de Novembre de 1986.

23C1.—Elevant $3 + \sqrt{5}$ a la n -èsima potència s'obté un nombre de la forma $a + b\sqrt{5}$ amb a i b enters. Demostreu que

$$0 < a - b\sqrt{5} < 1.$$

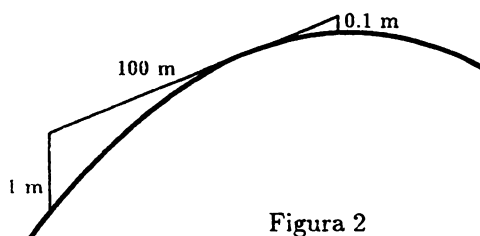
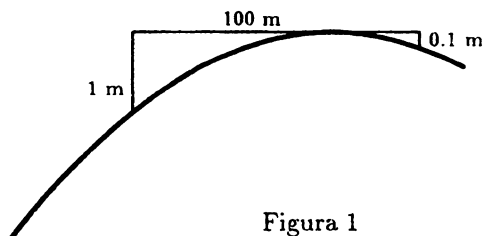
23C2.—Determineu els valors de a que fan que la successió $a_1 = a$, $a_2 = a + a_1^2$, $a_3 = a + a_2^2$, $\dots$, $a_n = a + a_{n-1}^2$, sigui creixent.

23C3.—En un triangle ABC de costats a , b , c , siguin m_a , m_b , m_c les mitjanes que passen, respectivament, pels vèrtexs A , B , C . Se sap que $b/a = \sqrt{17/5}$ i que $m_c = 2m_b$. Calculeu l'angle que formen aquestes dues mitjanes i les relacions c/a i c/b .

23C4.—Els canvis de rasant de les autopistes es fan segons un perfil parabòlic $y = -ax^2$, amb $a > 0$.

a) Determineu el màxim valor de a per tal que un observador de 1 m d'alçada amb visual tangent al punt més alt vegi un objecte de 0.1 m d'altura situat a 100 m de distància (Fig. 1).

b) Determineu el màxim valor de a per tal que un observador de 1 m d'alçada situat a qualsevol lloc vegi un objecte de 0.1 m d'altura situat a 100 m de distància (Fig. 2).



Segona sessió. 23 de Novembre de 1986.

23C5.—Estudieu la continuïtat de la funció $f(x) = x[1/x]$ i representeu gràficament la seva restricció al conjunt $(-\infty, -1/4] \cup [1/4, \infty)$, si $[x]$ indica la funció *part entera* de x .

23C6.—Digueu si es pot saber la data de naixement d'una persona sabent que ha nascut al segle XX, que la diferència entre l'any de naixement i 1900, més 100 vegades la suma del número del mes multiplicada per 40 i el número del dia és 13442.

23C7.—Un tren té 88 m de longitud i un altre 92 m. Quan circulen en direccions oposades tarden 7.5 s a creuar-se, i quan circulen en la mateixa direcció en tarden 45. Trobeu la velocitat dels dos trens.

23C8.—Trobeu dos nombre complexos α i β tals que els afixos dels nombres α , β , α/β i β/α siguin els vèrtexs d'un quadrat de diagonals α , β/α i β , α/β .

Problemes de la XXIII Olimpíada Matemàtica.
Segona fase (Espanya), 1986-87

Primera sessió. Febrer de 1987.

23E1.—Siguin a , b , c les longituds dels costats d'un triangle no isòsceles. Es donen tres cercles concèntrics de radis a , b i c .

a) Digueu quin és el nombre de triangles equilàters d'àrees diferents que es poden construir, de manera que les rectes que contenen els costats siguin cada una tangent a un dels cercles.

b) Trobeu les superfícies d'aquests triangles.

23E2.—Demostreu que per tot nombre natural $n > 1$ es compleix

$$1 \cdot \sqrt{\binom{n}{1}} + 2 \cdot \sqrt{\binom{n}{2}} + \cdots + n \cdot \sqrt{\binom{n}{n}} < \sqrt{2^{n-1}n^3}.$$

23E3.—Un triangle donat T es descompon en triangles $T_1, T_2, \dots, T_n$ de manera que:

a) Cap parell de triangles T_i té punts interiors en comú.

b) La unió dels triangles T_i és T .

c) Tot segment que és costat d'algun triangle T_i , o bé és costat d'un altre triangle T_j , o bé es costat del triangle T .

Siguin s el nombre total de costats (cada un comptat una sola vegada, encara que sigui comú a dos triangles), i v el nombre total de vèrtexs (cada un comptat una sola vegada, encara que sigui comú a diversos triangles).

Demostreu que si n és senar, existeixen diverses descomposicions d'aquesta mena, i totes tenen el mateix nombre v de vèrtexs i el mateix nombre s de costats. Expressau v i s en funció de n . Demostreu també que si n és parell no existeix cap descomposició.

Segona sessió. Febrer de 1987.

23E4.—Si a i b són dos nombres reals diferents, resolcu el sistema

$$\begin{aligned}x + y &= 1 \\(ax + by)^2 &\leq a^2x + b^2y.\end{aligned}$$

Resolcu també el sistema

$$\begin{aligned}x + y &= 1 \\(ax + by)^4 &\leq a^4x + b^4y.\end{aligned}$$

23E5.—En un triangle ABC tenim punts D i E respectivament sobre AB i AC . Coneixem la mesura dels angles indicats a continuació: $ABE = 30^\circ$, $EBC = 50^\circ$, $ACD = 20^\circ$ i $DCB = 60^\circ$. Trobeu el valor de l'angle EDC .

23E6.—Per cada nombre natural n considerem el polinomi

$$P_n(x) = x^{n+2} - 2x + 1.$$

- a) Demostreu que l'equació $P_n(x) = 0$ té una arrel c_n i només una a l'interval $(0, 1)$.
b) Calculeu $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$.

CURS 1987-88

Problemes de la XXIV Olimpíada Matemàtica.

Primera fase (Catalunya), 1987-88

Primera sessió. 11 de Desembre de 1987, de 16 h a 20 h.

24C1.—Determineu les potències de $(1+i)$ que són interiors a la corona circular determinada per les circumferències de centre $O = (0,0)$ i radis respectius 1000 i 10000.

24C2.—Busqueu els nombres primers de la forma $n^4 + n$, on n és un nombre enter positiu.

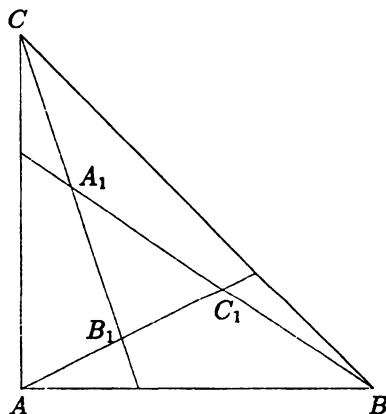
24C3.—Demostreu que per a qualsevol polinomi $p(x)$ existeix un nombre real k tal que un dels dos polinomis $p(x) + k$ i $x p(x) + k$ no té cap arrel real i l'altre una de sola.

24C4.—Donat un triangle rectangle isòsceles ABC , dividim cada un dels seus costats en tres parts iguals i tracem les rectes de la figura, que determinen un triangle $A_1B_1C_1$.

Determineu l'àrea del triangle $A_1B_1C_1$ en funció de l'àrea del triangle ABC .

Què passa si el triangle rectangle ABC no és isòsceles?

Què passa si el triangle ABC és un triangle qualsevol?



Segona sessió. 12 de Desembre de 1987, de 9 h a 13 h.

24C5.—Demostreu que si dos nombre enters són de la mateixa paritat (tots dos parells o tots dos senars), la meitat de la suma dels seus quadrats és una suma de dos quadrats.

24C6.—Demostreu que l'equació

$$3^a + 1 = 5^b + 7^c$$

només admet les solucions enteres $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$.

24C7.—Per un punt de la vora d'un quadrat es tracen dues rectes que divideixen el quadrat en tres trossos de la mateixa àrea. Calculeu l'angle d'aquestes rectes en funció dels punts de la vora.

24C8.—(a) Estudieu els intervals de creixement i decreixement de la funció

$$F(t) = \frac{\ln t}{t}.$$

(b) Comproveu que si $k \geq 3$ és enter, l'equació

$$(\ln x)^k = x$$

té exactament dues solucions més grans que e , diguem r_k i s_k , $r_k < s_k$, i que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r_k = e \quad \text{i} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} s_k = +\infty.$$

Indicació: En la resolució de l'apartat (b) tingueu en compte l'apartat (a).

Problemes de la XXIV Olimpíada Matemàtica.
Segona fase (Espanya), 1987-88

Primera sessió. Febrer de 1988.

24E1.—Sigui (x_n) , $n \in \mathbb{N}$, una successió de nombres enters tal que

$$\begin{aligned}x_1 &= 1, \\x_{n+1} &> x_n, \text{ per } n \geq 1, \\x_{n+1} &\leq 2n, \text{ per } n \geq 1.\end{aligned}$$

Demostreu que per tot enter natural k existeixen dos termes de la successió x_r i x_s tals que $x_r - x_s = k$.

24E2.—Sobre una circumferència s'eligeixen $n > 3$ punts i es numeren de 1 a n en qualsevol ordre. Direm que dos punts no consecutius a i b estan relacionats si en un dels dos arcs d'extremes a i b , tots els punts estan marcats amb números de valor menor que els de a i b .

Demostreu que el nombre de parells de punts relacionats és exactament $n - 3$.

24E3.—Demostreu que els binomis $25x + 31y$ i $3x + 7y$ són múltiples de 41 pels mateixos valors de x i y .

Segona sessió. Febrer de 1988.

24E4.—S'atribueix al matemàtic renaixentista Leonardo da Pisa (més conegut com Fibonacci) la successió definida de la manera següent

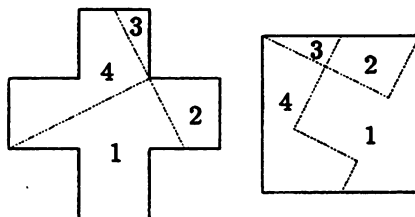
$$a_1 = 1,$$

$$a_2 = 1,$$

$$a_i = a_{i-1} + a_{i-2} \text{ per } i > 2.$$

Expresseu a_{2n} en funció només dels tres termes a_{n-1} , a_n , a_{n+1} .

24E5.—És molt conegut el *puzzle* consistent a descompondre la creu grega de l'esquerra de la figura en quatre parts amb les quals compondre un quadrat. Una solució habitual és la de la figura de la dreta. Demostreu que hi ha una infinitat de solucions diferents.



Hi ha alguna solució que doni lloc a quatre parts iguals?

24E6.—Calculeu, per qualsevol valor del paràmetre enter t , solucions enteres x , y de l'equació

$$y^2 = x^4 - 22x^3 + 43x^2 - 858x + t^2 + 10452(t + 39).$$

CURS 1988-89

Problemes de la XXV Olimpíada Matemàtica. Primera fase (Catalunya), 1988-89

Primera sessió. 16 de Desembre de 1988, de 16 h a 20 h.

25C1.—Demostreu que si n és un enter positiu i p és primer, aleshores $n^p - n$ és múltiple de p .

25C2.—Dos mòbils es desplacen amb velocitat constant al llarg d'un circuit tancat. Si surten simultàniament d'un mateix punt en el mateix sentit, tornen a coincidir al cap de 100 s i el més ràpid ha de menester 10 s menys que l'altre per a fer una volta completa.

Quant de temps tardaran a creuar-se si surten simultàniament del mateix punt en sentits oposats?

25C3.—Els extrems A i B d'un segment es mouen respectivament sobre dues rectes r i s que són perpendiculars. Descriviu la corba que recorre el punt M del segment tal que MA és la meitat de MB .

25C4.—La societat *Peces de Ferro S.A.* té nou accionistes que han de triar en Joan o en Pere com a President. És sabut que sis d'ells votaran en Joan i els altres tres en Pere, i que en el moment d'emetre el vot, cada un ho farà públicament en veu alta.

Determineu la probabilitat que en Joan vagi sempre per davant en les votacions.

Segona sessió. 17 de Desembre de 1988, de 9 h a 13 h.

25C5.—Considerem un conjunt $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ d'un nombre finit n de nombres reals estrictament positius. Demostreu que per a tot $n \geq 2$ es compleix

$$\frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2 x_3} + \frac{x_2^2}{x_2^2 + x_3 x_4} + \dots + \frac{x_{n-1}^2}{x_{n-1}^2 + x_n x_1} + \frac{x_n^2}{x_n^2 + x_1 x_2} \leq n - 1.$$

25C6.—Si α, β, γ són tres nombres complexos tals que els seus afixos determinen un triangle equilàter, demostreu que es compleix la igualtat

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha.$$

25C7.—Demostreu, per cada enter positiu n , les desigualtats

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}.$$

Si $[x]$ representa la part entera del nombre x , determineu el valor de

$$\left[1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{10^6}} \right].$$

25C8.—Descriviu totes les successions (a_n) de nombres reals tals que

$$|a_n - a_m| \leq e^{-(n+m)}.$$

Problemes de la XXV Olimpíada Matemàtica.
Segona fase (Espanya), 1988-89

Primera sessió. Febrer de 1989.

25E1.—El programa d'una assignatura consta de n preguntes; l'examen consisteix en la resposta d'una pregunta triada a l'atzar. Un alumne només se sap una pregunta, però pot repetir l'examen n vegades. Expresseu, en funció de n , la probabilitat p_n que l'alumne aprovi l'examen. Digueu si p_n és creixent o decreixent quan n augmenta. Calculeu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n.$$

Calculeu la fita inferior màxima de les probabilitats p_n .

25E2.—Els punt A' , B' , C' dels costats BC , CA , AB d'un triangle ABC compleixen

$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{BA'}{A'C} = \frac{CB'}{B'A} = k.$$

Les rectes AA' , BB' , CC' formen un triangle $A_1B_1C_1$. Donats k i l'àrea S del triangle ABC , calculeu l'àrea del triangle $A_1B_1C_1$.

25E3.—Demostreu que

$$\frac{1}{10\sqrt{2}} < \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 99}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 100} < \frac{1}{10}.$$

Segona sessió. Febrer de 1989.

25E4.—Demostreu que el nombre 1989 i totes les seves potències enteres 1989^n es poden escriure com a suma de dos quadrats de nombres enters positius, i com a mínim de dues formes diferents.

25E5.—Sigui $\mathcal{D}$ el conjunt dels nombres complexos que es poden escriure de la forma $a + b\sqrt{-13}$, amb a, b enters. El nombre $14 = 14 + 0\sqrt{-13}$ es pot escriure com a producte de dos elements de $\mathcal{D}$: $14 = 2 \cdot 7$. Expressen 14 com a producte de dos elements de $\mathcal{D}$ de totes les maneres possibles.

25E6.—Demostreu que donats set nombres reals qualssevol, se'n poden triar dos, diguem a i b , de manera que

$$\sqrt{3}|a - b| < |1 + ab|.$$

Doneu un exemple de sis nombres reals que no compleixin aquesta propietat.

CURS 1989-90

Problemes de la XXVI Olimpíada Matemàtica.

Primera fase (Catalunya), 1989-90

Primera sessió. 16 de Febrer de 1990, de 16 h a 20 h.

26C1.—Siguin A , B , C els vèrtexs d'un triangle i H l'ortocentre. Demostreu la igualtat

$$\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{HA}.$$

26C2.—Demostreu que si les longituds a , b , c dels costats d'un triangle compleixen $a < b < c$, aleshores l'angle C oposat al costat c compleix $\cos C < 1/2$.

26C3.—Sigui $A_n = 2^n + 2^{2n} + 2^{3n}$.

a) Demostreu que per a tot nombre natural n , el nombre $A_{n+3} - A_n$ és divisible per 7.

b) Calculeu el residu de dividir A_{1990} per 7.

26C4.—Donada la corba

$$y = x + \frac{1}{2x^2},$$

a) Calculeu l'àrea $S(t)$ limitada per la corba, la seva asímptota inclinada i les rectes $x = 1$ i $x = t$ ($t > 1$).

b) Calculeu

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S(t).$$

Segona sessió. 17 de Febrer de 1990, de 9 h a 13 h.

26C5.—Resoleu a l'interval $[0, 2\pi]$ la inequació

$$\cos x + \cos 3x + \cos 5x > 0.$$

26C6.—Un triangle rectangle T_1 té els costats en progressió geomètrica i un altre triangle rectangle T_2 els té en progressió aritmètica. Un costat del triangle T_1 és igual a un costat del triangle T_2 . Calculeu el valor màxim i el valor mínim de

$$\frac{\text{àrea } T_1}{\text{àrea } T_2}.$$

26C7.—Determineu els nombres complexos z tals que els afixos dels nombres

$$z^{1989}, z^{1990}, z^{1991}$$

siguin els vèrtexs d'un triangle rectangle isòsceles amb l'angle recte en el punt z^{1990} .

26C8.—Esbrineu si és possible tenir un pla P , una esfera E i un tetràedre regular T tals que els plans paral·lels a P o bé no tallin ni a l'esfera E ni al tetràedre T , o bé els tallin en figures de la mateixa àrea.

Estudieu la mateixa qüestió si el tetràedre no és regular.

Problemes de la XXVI Olimpíada Matemàtica.
Segona fase (Espanya), 1989-90

Primera sessió. 16 de Març de 1990.

26E1.—Siguin x i y dos nombres reals positius. Proveu que l'expressió

$$A = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$$

es pot escriure en la forma

$$B = \sqrt{x} + \sqrt{y + xy + 2y\sqrt{x}}$$

i compareu els nombres

$$L = \sqrt{3} + \sqrt{10 + 2\sqrt{3}} \quad \text{i} \quad M = \sqrt{5 + \sqrt{22}} + \sqrt{8 - \sqrt{22} + 2\sqrt{15 - 3\sqrt{22}}}.$$

26E2.—Cada punt d'un pla està pintat d'un color elegit entre tres de diferents. Es pregunta si existeixen necessàriament dos punts d'aquest pla que distin 1 cm i que estiguin pintats del mateix color.

26E3.—S'anomena part entera d'un nombre real a (i s'escriu $[a]$), el nombre enter més gran que sigui menor o igual que a . Si n és un nombre natural, demostreu que la part entera de $(4 + \sqrt{11})^n$ és un nombre senar.

Segona sessió. 17 de Març de 1990.

26E4.—Demostreu que la suma

$$\sqrt[3]{\frac{a+1}{2} + \frac{a+3}{6} \sqrt{\frac{4a+3}{3}}} + \sqrt[3]{\frac{a+1}{2} - \frac{a+3}{6} \sqrt{\frac{4a+3}{3}}}$$

és independent del valor de a , per tot valor real $a \geq -3/4$, i trobeu-ne el valor.

26E5.—Tres punts A' , B' , C' estan situats, respectivament, sobre els costats BC , CA i AB d'un triangle donat ABC d'àrea S , de manera que

$$\frac{AC'}{AB} = \frac{BA'}{BC} = \frac{CB'}{CA} = p,$$

essent p un paràmetre variable, $0 < p < 1$. Determineu

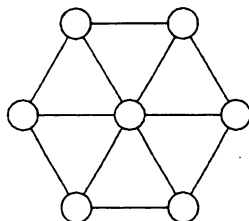
- 1) L'àrea del triangle $A'B'C'$ en funció de p .
- 2) El valor de p que fa mínima l'àrea anterior.
- 3) El lloc geomètric dels punts M d'intersecció de les paral·leles traçades per A' i C' , respectivament als costats AB i AC , quan p varia de 0 a 1.

26E6.—Es consideren n punts del pla de forma que no hi hagi dues parelles equidistants. Per cada punt es traça el segment que l'uneix al més proper. Demostreu que cap punt està unit a més de cinc punts.

Problemes de la XXVII Olimpíada Matemàtica.
Primera fase (Catalunya), 1990-91

Primera sessió. 14 de Desembre de 1990, de 16 h a 20 h.

27C1.—La figura adjunta representa un entramat de camins per on pot moure's una tortuga, la qual, a cada cruïlla, escull a l'atzar un qualsevol dels camins que pot seguir. Si deixem la tortuga lliure en el punt A , calculeu la probabilitat que torni a passar pel punt A en menys de n moviments.



27C2.—Determineu quina condició han de complir les xifres de les desenes de dos nombres acabats en 6, per tal que el seu producte acabi en 36.

27C3.—Siguin r i R dos rectangles d'àrea unitat, tals que el perímetre de R és doble del perímetre de r . Siguin d i D les longituds de les diagonals de r i R .

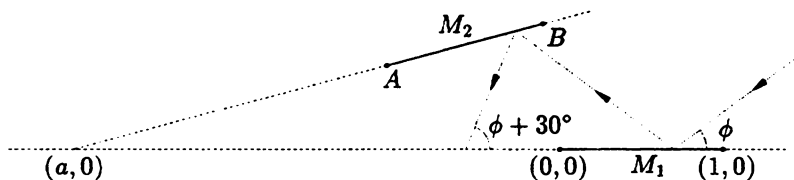
a) Demostreu que $2 < D/d \leq \sqrt{7}$.

b) Si $D = d\sqrt{5}$, determineu les longituds dels costats dels dos rectangles.

27C4.—Prenem un sistema rectangular de coordenades al pla. Tenim un mirall M_1 unidimensional posat cara amunt sobre el segment d'extrems $(0,0)$ i $(1,0)$. Sobre la recta que passa per $(a,0)$ amb $a < 0$ i que té pendent $m > 0$ posem un mirall M_2 d'extrems A i B mirant cap avall. Determineu a , m i els punts A i B per tal que es compleixi:

a) Tot raig que arriba a M_1 amb un angle ϕ respecte de la direcció de les x positives, $30^\circ \leq \phi \leq 45^\circ$, és reflectit cap a M_2 , es reflecteix a M_2 i no torna a trobar M_1 . L'angle entre la direcció de les x positives i el raig que arriba de M_2 és $\phi + 30^\circ$.

b) La longitud de M_2 és mínima respecte a tots els possibles miralls que compleixen la condició anterior.



Segona sessió. 15 de Desembre de 1990, de 9 h a 13 h.

27C5.—Troheu els nombres de quatre xifres que són iguals al quadrat de suma del nombre format per les dues primers xifres i el format per les dues darreres xifres.

27C6.—Considereu un triangle equilàter inscrit en una circumferència de radi 1. Li apliquem una rotació d'angle ϕ de centre el centre de la circumferència. Calculeu l'àrea comuna als dos triangles i el valor de l'angle ϕ que fa que l'àrea comuna sigui mínima.

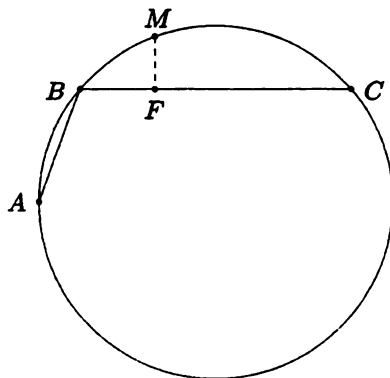
27C7.—Demostreu que tot nombre de la forma $2/n$, amb n senar, es pot posar com a suma de dues fraccions unitàries (és a dir, de fraccions de numerador 1.)

Deduïu-ne que tota fracció m/n , amb n senar, admet una descomposició en suma de fraccions unitàries diferents. Comproveu també que si m/n admet una descomposició en suma de r fraccions unitàries diferents, n'admet una altra en suma de s fraccions unitàries, per tot $s > r$.

27C8.—Siguin AB i BC dues cordes d'un cercle ($AB < BC$) i sigui M el punt mitjà de l'arc ABC . Sigui F el peu de la perpendicular des de M a la corda BC .

a) Proveu que F és el punt mitjà de la corda trencada, és a dir, $AB + BF = FC$.

b) Useu el punt anterior per veure que $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$.



Problemes de la XXVII Olimpíada Matemàtica.
Segona fase (Espanya), 1990-91

Primera sessió. 15 de febrer de 1991.

27E1.—Al pla, on s'ha pres un sistema de referència ortonormal, es consideren tots els punts (m, n) tals que les seves coordenades són nombres enters. Suposem que s'hagin traçat tots els segments que uneixen parells qualssevol d'aquests punts i que tenen longitud entera. Proveu que no hi ha dos segments d'aquests que formin un angle de 45° .

Fem el mateix amb els punts (m, n, k) de l'espai. Hi haurà algun parell de segments que formin un angle de 45° ?

27E2.—Siguin a i b enters diferents de 0, 1 i -1 i considerem la matriu

$$\begin{pmatrix} a+b & a+b^2 & a+b^3 & \cdots & a+b^m \\ a^2+b & a^2+b^2 & a^2+b^3 & \cdots & a^2+b^m \\ a^3+b & a^3+b^2 & a^3+b^3 & \cdots & a^3+b^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^n+b & a^n+b^2 & a^n+b^3 & \cdots & a^n+b^m \end{pmatrix}.$$

Determineu un subconjunt S de files d'aquesta matriu, el més petit possible, tal que qualsevol altra fila es pugui expressar com a suma de les files de S multiplicades per nombres enters apropiats (és a dir, com a combinació lineal amb coeficients enters de les files de S .) Expliciteu aquestes combinacions lineals.

27E3.—Suposem que l'equació $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ amb $r \neq 0$, admet tres arrels reals i positives. Determineu la relació que hi ha entre els nombres reals p , q i r per tal que les tres arrels puguin ser les longituds dels costats d'un triangle.

Segona sessió. 16 de febrer de 1991.

27E4.—Siguin A' , B' i C' els punts de tangència dels costats BC , CA i AB d'un triangle amb la seva circumferència incrita. Sigui D el punt d'intersecció de $C'A'$ amb la bisectriu de l'angle del vèrtex A . Calculeu el valor de l'angle $\widehat{ADC}$.

27E5.—Donat un nombre natural n , indiquem per $s(n)$ la suma de les xifres del nombre n , expressat en el sistema de numeració binari, és a dir, el nombre de xifres 1 que té. Determineu, per a tot nombre natural k

$$\sigma(k) = s(1) + s(2) + \cdots + s(2^k).$$

27E6.—Calculeu la part entera de

$$S = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10000}}.$$

CURS 1991-92

Problemes de la XXVIII Olimpíada Matemàtica.

Primera fase (Catalunya), 1991-92

Primera sessió. 22 de Novembre de 1991, de 16 h a 20 h.

28C1.—Demostreu que el nombre que escrit en base n , $n \geq 8$ és 1367631, és un cub perfecte. En particular, calculeu l'arrel cúbica d'aquest nombre en base 10 i en base 1991.

28C2.—Sigui S el conjunt de les rectes que uneixen un punt del conjunt

$$A = \left\{ \left(0, \frac{1}{a} \right) \mid a \in \mathbb{N} \right\}$$

i un punt del conjunt

$$B = \{ (b+1, 0) \mid b \in \mathbb{N} \}.$$

Demostreu que un nombre natural m és compost si i només si el punt $M = (m, -1)$ està sobre una recta del conjunt S .

Determineu també el nombre de rectes del conjunt S que passen per un punt $M = (m, -1)$ en funció del nombre natural m .

28C3.—L'abscissa d'un punt que es mou sobre la part positiva de l'eix de les X ve donada per

$$x(t) = 5(t+1)^2 + \frac{a}{(t+1)^5}$$

on a és una constant positiva.

Quin és el mínim valor de a pel qual $x(t) \geq 24$ per a tot $t \geq 0$?

28C4.—Tenim dues circumferències S_1 , S_2 iguals, de radi R , i tangents. Considerem la tangent comuna r , paral·lela a la recta que uneix els centres de S_1 i S_2 .

Siguin C_1 , la circumferència tangent a r , S_1 i S_2 ; C_2 , la circumferència tangent a C_1 , S_1 i S_2 ; C_3 , la circumferència tangent a C_2 , S_1 i S_2 ; etc.

S'obté així una família de circumferències $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$. Demostreu que el diàmetre de la circumferència C_n és

$$d_n = \frac{R}{n(n+1)}.$$

Segona sessió. 23 de Novembre de 1991, de 9 h a 13 h.

28C5.—Per cada nombre natural n escrivim

$$(1 + \sqrt{2})^{2n+1} = a_n + b_n\sqrt{2}$$

i així tenim dues successions de nombres enters

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \quad \text{i} \quad b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$$

- a) Demostreu que a_n i b_n són senars per tot $n \in \mathbb{N}$.
- b) Demostreu que b_n és la hipotenusa d'un triangle rectangle de catets

$$\frac{a_n + 1}{2} \quad \text{i} \quad \frac{a_n - 1}{2}.$$

28C6.—Siguin z_1, z_2, z_3 i z_4 nombres complexos de igual mòdul;

- a) si $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, què es pot dir de la figura formada pels afixos d'aquests tres nombres complexos?
- b) si $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$, què es pot dir de la figura formada pels afixos d'aquests quatre nombres complexos ?

28C7.—Sigui $p(n)$ el nombre de factors primers del nombre natural n . Demostreu que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n)}{n} = 0.$$

28C8.—Sigui ABC un triangle qualsevol. Exteriorment a ell es construeixen dos quadrats $BAEP$ i $ACRD$ de costats AB i AC respectivament. Siguin M i N els punts mitjans de BC i ED . Demostreu que AM és perpendicular a ED i que AN és perpendicular a BC .

Problemes de la XXVIII Olimpíada Matemàtica.
Segona fase (Espanya), 1991-92

Primera sessió. 14 de Febrer de 1992.

28E1.—Un nombre N , múltiple de 83, és tal que el seu quadrat té 63 divisors. Trobeu N , sabent que és el nombre més petit que compleix les condicions anteriors.

28E2.—Donades dues circumferències exteriors de radis r i r' ($r \neq r'$), es demana de dibuixar, raonadament, una recta paral·lela a una direcció donada, de tal manera que determini sobre les dues circumferències dues cordes tals que la suma de llurs longituds sigui igual a una longitud donada ℓ .

28E3.—Proveu que si a , b , c i d són nombres enters no negatius, i és

$$(a + b)^2 + 2a + b = (c + d)^2 + 2c + d, \quad (*)$$

necessàriament ha de ser $a = c$ i $b = d$.

Proveu la mateixa conclusió si, en lloc de (*) es compleix

$$(a + b)^2 + 3a + b = (c + d)^2 + 3c + d.$$

Vegeu que, en canvi, existeixen nombres enters no negatius $a \neq c$, $b \neq d$, tals que

$$(a + b)^2 + 4a + b = (c + d)^2 + 4c + d.$$

Segona sessió. 15 de Febrer de 1992.

28E4.—Sigui la successió (progressió aritmètica)

$$3, 7, 11, 15, \dots$$

Demostreu que en aquesta successió hi ha infinits nombres primers.

28E5.—Dibuixat el triangle de vèrtexs A , B , C , es demana de determinar gràficament el punt P tal que

$$\widehat{PAB} = \widehat{PBC} = \widehat{PCA}.$$

Expresseu una funció trigonomètrica d'aquest angle $\widehat{PAB}$ en funció de les funcions trigonomètriques dels angles A , B i C .

28E6.—Donats un nombre natural $n > 0$ i un nombre complex $z = x + iy$ de mòdul unitat, $x^2 + y^2 = 1$, es pot complir o no la igualtat

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)^n = 2^{n-1} \left(z^n + \frac{1}{z^n}\right).$$

Fixat n designarem per $S(n)$ el subconjunt de complexos de mòdul unitat pels quals es compleix la igualtat donada. Es demana

- Calculeu raonadament $S(n)$, per $n = 2, 3, 4, 5$.
- Fiteu superiorment el nombre d'elements de $S(n)$ en funció de n , per $n > 5$.

CURS 1992-93

Problemes de la XXIX Olimpíada Matemàtica. Primera fase (Catalunya), 1992-93

Primera sessió. 11 de Desembre de 1992, de 16 h a 18 h 30 m.

29C1.—Demostreu que el nombre combinatori

$$\binom{1992}{1492}$$

no és múltiple de 500.

29C2.—Proveu que si els nombres

$$\sin(b + c - a), \quad \sin(c + a - b) \quad \text{i} \quad \sin(a + b - c)$$

estan en progressió aritmètica, llavors també ho estan els nombres

$$\tan a, \quad \tan b \quad \text{i} \quad \tan c.$$

29C3.—En un cercle de centre O i radi 1 tracem una corda i construïm seguidament el semicercle que té com a diàmetre aquesta corda i no està contingut en el cercle inicial. Sigui P el punt d'aquest semicercle que està més lluny del punt O . Quina longitud ha de tenir la corda per tal que la distància OP sigui màxima?

Segona sessió. 12 de Desembre de 1992, de 9 h a 13 h.

29C4.—Calculeu els límits

a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{(n-1)n}).$$

b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt[3]{(n-1)n^2}).$$

29C5.—Sobre una recta horitzontal construïm triangles equilàters de forma que les respectives bases són segments adjacents de longituds 1, 3, 5, 7, ... Demostreu que els vèrtexs superiors dels triangles estan sobre una paràbola.

29C6.—Un rectangle es pot descompondre en 9 quadrats de costats 1, 4, 7, 8, 9, 10, 14, 15 i 18. Calculeu els costats del rectangle.

29C7.—El joc de daus americà es juga de la manera següent: el jugador va tirant successivament els daus fins que perd o guanya.

A la primera tirada guanya si la suma dels punts dels dos daus és 7 o bé 11, i perd si la suma de punts és 2, 3 o 12. Altrament anomenarem *el seu valor* la suma de punts que ha tret en la primera tirada.

A partir d'aquí tirarà els dos daus fins que tregui un 7, i llavors perdrà, o bé que tregui novament *el seu valor* i llavors guanyarà.

Calculeu la probabilitat que té un jugador de guanyar en aquest joc.

29C8.—Sigui $A = 66^{66}$. Sigui B la suma de les xifres de A , i C la suma de les xifres de B . Calculeu la suma de les xifres de C .

Problemes de la XXIX Olimpíada Matemàtica.
Segona fase (Espanya), 1992-93

Primera sessió. 26 de Febrer de 1993.

29E1.—En una reunió hi ha 201 persones de 5 nacionalitats diferents. Se sap que, a cada grup de 6, com a mínim 2 tenen la mateixa edat. Demostreu que hi ha al menys 5 persones del mateix país, de la mateixa edat i del mateix sexe.

29E2.—Escrit el triangle aritmètic

0	1	2	3	4	...	1991	1992	1993
	1	3	5	7	...		3983	3985
		4	8	12	...			7968
			...	...	...			

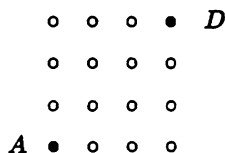
on cada nombre és igual a la suma dels dos que té al damunt (és evident que cada fila té un nombre menys que la fila anterior, i per tant, la darrera està formada per un únic nombre), raoneu el fet que l'últim nombre sigui múltiple de 1993.

29E3.—Justifiqueu raonadament que a qualsevol triangle, el diàmetre de la circumferència inscrita no és més gran que el radi de la circumferència circumscrita.

Segona sessió. 27 de Febrer de 1993.

29E4.—Demostreu que tot nombre primer p diferent de 2 i de 5 té infinits múltiples escrits només amb uns (és a dir, de la forma $111\dots 1$).

29E5.—Es donen 16 punts que formen una quadrícula com a la figura:



De tots ells, se n'han destacat dos: A i D . Es demana que fixeui, de totes les maneres possibles, dos altres punts B i C amb la condició que les 6 distàncies determinades pels quatre punts siguin totes diferents. En aquest conjunt de quaternes, s'ha d'estudiar:

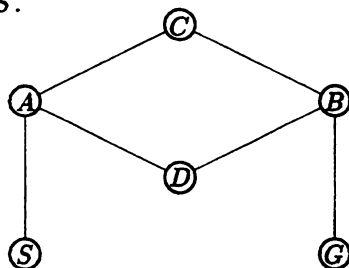
1) Nombre de figures de 4 punts que existeixen amb les condicions de l'enunciat.

2) Figures que són geomètricament diferents, és a dir, no deduïbles una de l'altra per una transformació d'igualtat.

3) Si cada punt es designa per un parell d'enters (X_i, Y_i) , la suma $|X_i - X_j| + |Y_i - Y_j|$ estesa al sis parells AB, AC, AD, BC, BD, CD , és constant.

29E6.—Una màquina de joc d'un casino té una pantalla on s'ofereix un esquema com el de la figura. En començar el joc apareix una bola al punt S .

A cada impuls del jugador, la bola es mou a cada un dels cercles immediats, amb la mateixa probabilitat per a cada un d'ells. La partida acaba quan té lloc per primera vegada un dels dos esdeveniments següents: (1) La bola torna a S , i el jugador perd. (2) La bola arriba a G , i llavors el jugador guanya. Es demana la probabilitat que el jugador guanyi, i la duració mitjana de les partides.



CURS 1993-94

Problemes de la XXX Olimpíada Matemàtica.

Primera fase (Catalunya), 1993-94

Primera sessió. 14 de Gener de 1994, de 16 h a 20 h.

30C1.—Dues circumferències C_1 i C_2 es tallen en punts A i B . Es pren un punt M de C_1 , exterior a C_2 , i es tracen les rectes MA i MB . Anomenem A' i B' els punts (diferents de A i de B) en què aquestes rectes tallen respectivament la circumferència C_2 . Demostreu que la longitud del segment $A'B'$ no depèn de la posició de M .

30C2.—Demostreu que la funció

$$f(x) = 2 \arctan x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$$

és constant en el conjunt dels nombres reals tals que $x \geq 1$.

30C3.—El nombre 9687600 es pot escriure com a producte de nombres enters consecutius, un dels quals és primer. Calculeu quins són aquests factors.

30C4.—En una bossa hi ha n boles numerades amb números de 1 a n .

a) Si traiem tres boles d'aquesta bossa, totes alhora, calculeu la probabilitat que no surti cap parella de números consecutius.

b) Si traiem m boles d'aquesta bossa, totes alhora, demostreu que la probabilitat que no surti cap parella de números consecutius és

$$\frac{\binom{n-m+1}{m}}{\binom{n}{m}}.$$

Segona sessió. 15 de Gener de 1994, de 9 h a 13 h.

30C5.—Digueu quina relació hi ha d'haver entre les arestes d'un tetràedre per tal que les seves cares siguin triangles semblants no tots iguals.

30C6.—Una successió de terme general a_n compleix $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ per a $n > 2$. Se sap que la suma dels 1000 primers termes és 500, i que la suma dels 1000 següents és 2000. Calculeu la suma dels 1993 primers termes i el terme a_{1994} .

30C7.—Sigui $P(x)$ un polinomi amb coeficients enters.

a) Comproveu que si m i n són nombres enters, llavors $P(m) - P(n)$ és divisible per $m - n$.

b) Demostreu que si hi ha tres nombres enters a , b i c tals que $P(a) = P(b) = P(c) = 2$, llavors $P(x) \neq 3$ per tot x enter.

30C8.—Calculeu totes les arrels complexes de l'equació

$$z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0.$$

Problemes de la XXX Olimpíada Matemàtica.
Segona fase (Espanya), 1993-94

Primera sessió. 25 de Febrer de 1994.

30E1.—Demostreu que si entre els infinits termes d'una progressió aritmètica de nombres enters hi ha un quadrat perfecte, llavors infinits termes de la progressió són quadrats perfectes.

30E2.—Sigui $O.XYZ$ un triedre trirectangle de vèrtex O i arestes X , Y i Z . Sobre l'aresta Z es fixa un punt C tal que $OC = c$. Sobre X i Y es consideren, respectivament, punts variables P i Q de manera que $OP + OQ$ sigui una constant donada k . Per a cada parell de punts P i Q , els quatre punts O , C , P i Q determinen una esfera, el centre de la qual W , es projecta sobre el pla OXY . Raoneu quin és el lloc geomètric d'aquesta projecció. Raoneu també quin és el lloc geomètric de W .

30E3.—Una Oficina de Turisme vol fer una enquesta sobre el nombre de dies asolellats i de dies de pluja al llarg d'un any. Per tal de fer-ho, demana informació a sis regions, les quals li transmeten la informació de la taula següent:

<i>Regió</i>	<i>Sol o pluja</i>	<i>Inclassificable</i>
A	336	29
B	321	44
C	335	30
D	343	22
E	329	36
F	330	35

La persona encarregada de l'enquesta, que té dades més detallades, no és imparcial. S'adona que prescindint d'una de les regions, la observació dona un nombre de dies plujosos que és la tercera part del nombre de dies de sol. Digueu raonadament de quina regió ha de prescindir.

Segona sessió. 26 de Febrer de 1994.

30E4.—L'angle A d'un triangle isòsceles ABC mesura $2/5$ de recte, i els angles B i C són iguals. La bisectriu de l'angle C talla el costat oposat al punt D . Calculeu les mesures dels angles del triangle BCD . Expressieu la mesura a del costat BC en funció de la mesura b del costat AC , sense que a l'expressió hi aparegui cap raó trigonomètrica.

30E5.—Amb 21 fitxes de dames, unes de blanques i unes de negres, es forma un rectangle 3×7 . Demostreu que sempre hi ha quatre fitxes del mateix color situades en els vèrtexs d'un rectangle.

30E6.—Un polígon convex de n costats es descompon en m triangles amb interiors disjunts, de manera que cada costat d'aquests m triangles ho és també d'altre triangle contigu o del polígon donat. Demostreu que $m + n$ és parell. Coneguts m i n , trobeu el nombre de costats diferents que queden a l'interior del polígon i el nombre de vèrtexs diferents que queden en aquest interior.

CURS 1994-95

Problemes de la XXXI Olimpíada Matemàtica.

Primera fase (Catalunya), 1994-95

Primera sessió. 13 de Gener de 1995, de 16 h a 20 h.

31C1.—Donat un triangle isòsceles de base 2 i altura 2, trobeu les paràboles tangents als costats iguals del triangle isòsceles tals que l'àrea que tanquin amb la base del triangle sigui màxima i mínima.

31C2.—Sigui $N = abc_{(n)}$ un nombre escrit en el sistema de numeració de base n , on $0 \leq a, b, c \leq n-1$ i on a, b, c són diferents entre ells i de zero. Formeu els nombres en base n que s'obtenen permutant de totes les maneres possibles les xifres a, b, c . Demostreu que la suma d'aquests nombres és divisible per $111_{(n)}$. Generalitzeu l'enunciat del problema a nombres de p xifres escrits en base n .

31C3.—Donat un triangle ABC i un punt M sobre AC , busqueu un punt N en un dels altres costats de manera que el segment MN divideixi el triangle en dues parts que tinguin la mateixa àrea.

31C4.—Tenim dos daus perfectes normals. Volem canviar les puntuacions de cadascuna de les cares dels dos daus de manera que les probabilitats d'aconseguir els resultats 2 a 12, llançant-los simultàniament, sigui la mateixa que s'esdevindria usant els dos daus donats inicialment. A les noves puntuacions dels daus es permet la repetició d'una mateixa puntuació en dues cares, així com la utilització de puntuacions superiors al 6, però no s'accepta pas el 0. És possible de fer això?

Segona sessió. 14 de Gener de 1995, de 9 h a 13 h.

31C5.—Siguin $[a, b]$ i $[c, d]$ dos intervals tancats de $\mathbb{R}$. Siguin $x_0, x_1, \dots, x_n, y_0, y_1, \dots, y_n$ nombres reals que compleixen

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

$$c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d.$$

Proveu que si cadascun dels n^2 rectangles de $\mathbb{R}^2$

$$[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \quad (0 \leq i, j \leq n-1)$$

té un costat de longitud entera, llavors el rectangle gran $[a, b] \times [c, d]$ també té un costat de longitud entera.

31C6.—Siguin A, B i C els tres angles d'un triangle.

a) Demostreu que es compleix la igualtat

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C.$$

b) Supposeu que tres arrels de l'equació polinòmica

$$x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$$

són $\tan A, \tan B$ i $\tan C$, on A, B i C són els tres angles d'un triangle. Busqueu la quarta arrel en funció solament dels coeficients p, q, r, s del polinomi.

31C7.—Busqueu una fórmula general que permeti conèixer còmodament les hores en les quals la busca horària d'un rellotge i la minutera formen un angle recte. Comproveu aquesta fórmula general per a les 3 i les 9 hores.

31C8.—Sigui $ABCD$ un rectangle, dividim el costat AB en p parts iguals i el costat AD en q parts iguals, amb p, q enters senars, i considerem la quadrícula resultant.

- Calculeu el nombre de camins de longitud mínima per la quadrícula que van del vèrtex A al seu vèrtex oposat C .
- Cadascun d'aquests camins tanca amb els costats AB i BC una certa àrea. Calculeu la suma d'aquestes àrees.
- Si m és la mitjana aritmètica d'aquestes àrees, es demana quants camins tanquen aquesta àrea m .

Problemes de la XXXI Olimpíada Matemàtica.
Segona fase (Espanya, celebrada a Castelló), 1994-95

Primera sessió. 24 de febrer de 1995, de 16 h a 20 h.

31E1.—Es consideren conjunts A de cent nombres naturals diferents, que tinguin la propietat que si a, b, c són elements qualssevol (iguals o diferents) de A , existeix un triangle no obtusangle els costats del qual mesuren a, b i c unitats.

S'anomena $S(A)$ la suma dels perímetres considerats a la definició de A . Calculeu el valor mínim de $S(A)$.

31E2.—Retallem diversos cercles de paper (no necessàriament iguals) i els estenem sobre una taula de manera que n'hi hagi alguns de superposats (amb part interior comuna), però de tal forma que no hi hagi cap cercle dins d'un altre.

Proveu que és impossible engalzar les peces que resulten de retallar les parts no superposades i compondre amb elles cercles disjunts.

31E3.—Pel baricentre G d'un triangle ABC es traça una recta que talla el costat AB en P i el costat AC en Q . Demostreu que

$$\frac{PB}{PA} \cdot \frac{QC}{QA} \leq \frac{1}{4}.$$

Segona sessió. 25 de febrer de 1995, de 10 h a 13 h.

31E4.—Trobeu les solucions enteres de l'equació

$$p(x + y) = xy$$

on p és un nombre primer.

31E5.—Demostreu que en cas que les equacions

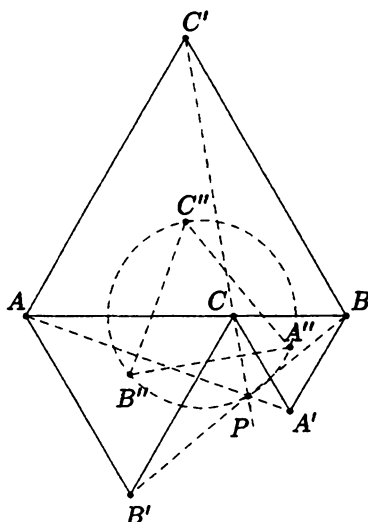
$$x^3 + mx - n = 0$$

$$nx^3 - 2m^2x^2 - 5mnx - 2m^3 - n^2 = 0$$

($n \neq 0$), tinguin una arrel comuna, la primera tindrà dues arrels iguals, i determineu llavors les arrels de les dues equacions en funció de n .

31E6.—A la figura, AB és un segment fix i C un punt variable dins d'ell. Es construeixen triangles equilàters ACB' i CBA' de costats AC i CB en un mateix semiplà definit per AB , i un altre triangle equilàter ABC' de costat AB en el semiplà oposat. Demostreu:

- Les rectes AA' , BB' i CC' són concurrents.
- Si anomenem P el punt comú a les tres rectes del punt a), trobeu el lloc geomètric de P quan C varia en el segment AB .
- Els centres A'' , B'' i C'' dels tres triangles formen un triangle equilàter.
- Els punts A'' , B'' , C'' i P són concíclics.



CURS 1995-96

Problemes de la XXXII Olimpíada Matemàtica.

Primera fase (Catalunya), 1995-96

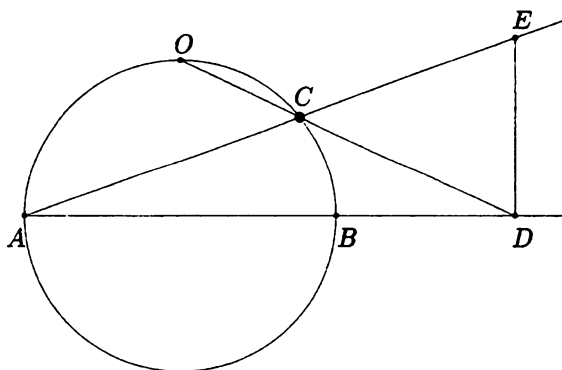
Primera sessió. 15 de Desembre de 1995, de 16 h a 20 h.

32C1.—Un cert professor de matemàtiques va escriure a la pissarra un polinomi $f(x)$ amb coeficients enters i va dir: “Si al polinomi substituïm x per l’edat del meu fill, que acaba de fer a anys, obtenim la igualtat $f(a) = a$. A més, $f(0) = p$ és un nombre primer més gran que a .” Quants anys té el fill del professor?

32C2.—Sigui n un nombre natural. Trobeu el nombre més gran k tal que en el conjunt $\{1, 2, \dots, n\}$ poguem agafar un subconjunt A de k nombres que compleixi que si x, y, z són nombres qualssevol de A , sempre sigui $x + y \neq z$.

32C3.—Escollim un nombre natural n i demanem a r persones que escriguin un subconjunt de $\{1, 2, \dots, n\}$. Quina és la probabilitat que els r subconjunts obtinguts siguin disjunts dos a dos?

32C4.—Sigui AB el diàmetre d’una circumferència, O el punt mig d’un dels arcs que van de A a B , i C un punt qualsevol de l’arc OB . Dibuixem les rectes AC , OC , i sigui D la intersecció de OC amb AB . Sigui DE perpendicular a AD i E la seva intersecció amb AC . Demostreu que els segments BD i DE tenen la mateixa longitud.



Segona sessió. 16 de Desembre de 1995, de 9 h a 13 h.

32C5.—Calculeu un nombre de sis xifres sabent que passant-ne l'última al davant queda dividit per 3.

32C6.—Calculeu el màxim comú divisor de

$$\binom{n}{k}, \binom{n+1}{k}, \dots, \binom{n+k}{k},$$

on n i k són nombres naturals, $n \geq k$.

32C7.—Demostreu que si un polígon inscrit en una circumferència de radi r té costats de longituds $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$, es compleix

$$\ell_1^2 + \ell_2^2 + \dots + \ell_n^2 \leq 9r^2.$$

Determineu per quins polígons hi ha igualtat.

32C8.—Donat un nombre natural n , sigui $p(n)$ el producte de les seves xifres. Demostreu que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n)}{n} = 0.$$

Problemes de la XXXII Olimpíada Matemàtica.
Segona fase (Espanya, celebrada a Tarragona), 1995-96

Primera sessió. 22 de febrer de 1996, de 16 h a 20 h.

32E1.—Els nombres naturals a i b són tals que

$$\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a}$$

és un enter. Demostreu que el màxim comú divisor de a i b no és més gran que $\sqrt{a+b}$.

32E2.—Sigui G el baricentre del triangle ABC . Demostreu que si

$$AB + GC = AC + GB,$$

llavors el triangle és isòsceles.

32E3.—Siguin a , b , c tres nombres reals. Es consideren les funcions

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{i} \quad g(x) = cx^2 + bx + a.$$

Sabent que

$$|f(-1)| \leq 1, \quad |f(0)| \leq 1, \quad \text{i} \quad |f(1)| \leq 1,$$

proveu que si $-1 \leq x \leq 1$, aleshores $|f(x)| \leq 5/4$ i $|g(x)| \leq 2$.

Segona sessió. 23 de febrer de 1996, de 10 h a 13 h.

32E4.—Discutiu l'existència de solucions reals x de l'equació

$$\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x$$

segons els valors reals del paràmetre p , i resoleu-la en els casos que tingui solució.

32E5.—A *Port Aventura* hi ha 16 agents secrets. Cada un d'ells vigila algun dels seus col·legues. Se sap que si l'agent A vigila l'agent B , aleshores B no vigila A . Sabem també que 10 agents qualssevol poden ser numerats de manera que el primer vigila el segon, aquest vigila el tercer, ..., el desè vigila el primer. Demostreu que també es poden numerar d'aquesta manera 11 agents qualssevol.

32E6.—La figura adjunta es compon de sis pentàgons regulars de costat un metre. Es doblega per la línia de punts fins que coincideixen les arestes no puntejades que es tallen en un vèrtex. Quin volum d'aigua hi cap, al recipient així format?

